

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

Clasa a V - a

Problema 1. Pe o tablă sunt scrise toate numerele naturale formate doar cu cifre de 9 care au cel mult 30 de cifre, adică $9, 99, 999, \dots, \underbrace{99 \dots 999}_{30 \text{ cifre}}$. Notăm cu S suma lor.

- a) Determinați suma cifrelor numărului S .
- b) Demonstrați că orice număr scris pe tablă este mai mic decât $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{99}$.
- c) Alina șterge de pe tablă câteva numere și calculează suma lor. Poate alege Mihai câteva numere din cele rămase pe tablă pentru a obține aceeași sumă cu Alina?

Problema 2. Se consideră șirul $1, 3, 4, 7, 1, 8, \dots$, unde orice termen, începând cu al treilea, este egal cu ultima cifră a sumei ultimilor doi termeni precedenți. Notăm S_n suma primilor n termeni ai șirului.

- a) Arătați că S_{25} este pătrat perfect.
- b) Determinați numărul natural n , astfel încât $S_n = 2026$.
- c) Arătați că oricare ar fi numărul natural nenul n , S_n nu poate avea ultimele patru cifre 2025.

Problema 3. Fie $a = 2^{2^3} : (2^2)^3 \cdot (2^2 + 2 + 1)^2 - 2$. Să se afle numerele naturale b și c pentru care $a + 2^b = c^2$.

Problema 4. Pe cartonașe de trei culori – roșu, albastru și verde – sunt scrise 31 de numere naturale consecutive. Pentru fiecare număr se face împărțirea la 3. Dacă se obține restul 0, numărul este scris pe un cartonaș roșu; dacă se obține restul 1, pe un cartonaș albastru; iar dacă se obține restul 2, pe un cartonaș verde. Maria ia toate cartonașele verzi. Ana alege una dintre celelalte două culori și ia toate cartonașele de acea culoare. Suma numerelor scrise pe cartonașele Anei este cu 2025 mai mare decât suma numerelor scrise pe cartonașele Mariei.

Determinați câte cartonașe are Ana și care este cel mai mic dintre cele 31 de numere.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

Clasa a VI - a

Problema 1. Fie numerele naturale $a=10n+7$ și $b=14n+9$. Să se demonstreze că cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b este produsul lor, pentru orice valoare a numărului natural n .

Problema 2. În jurul punctului O se consideră unghiurile AOB , BOC , COD și DOA astfel încât $6 \cdot m(\sphericalangle COD) = 7 \cdot m(\sphericalangle BOC)$, $10 \cdot m(\sphericalangle AOB) = 7 \cdot m(\sphericalangle AOD)$ și unghiul format de bisectoarele unghiurilor AOD și BOC este alungit.

- Demonstrați că unghiurile AOB și COD sunt congruente.
- Aflați măsurile unghiurilor AOB , BOC , COD și DOA .

Problema 3. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 24\}$. Demonstrați că, oricum am alege 17 numere distincte din mulțimea M există printre ele două numere al căror produs este un pătrat perfect.

Problema 4. Pe segmentul AB se consideră punctele $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$, în această ordine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $AM_1 = x$, $M_1M_2 = 2AM_1$, $M_2M_3 = 2AM_2$, $M_3M_4 = 2AM_3$, \dots , $M_{n-1}M_n = 2AM_{n-1}$, $M_nB = 2AM_n$.

- Dacă $x = 2$ cm calculați lungimea segmentului M_3M_5 .
- Aflați numărul natural n știind că $AB = 2187x$.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore

Toate problemele sunt obligatorii

Fiecare problemă se punctează de la 0 la 22.5 puncte și se acordă 10 puncte din oficiu

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

Clasa a VII - a

Problema 1.a) Calculați: $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{6})^2} + \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{7})^2} + \dots + \sqrt{(\sqrt{2024} - \sqrt{2025})^2}$.b) Aflați numerele raționale a și b pentru care $3a - b\sqrt{3} = 2 - b + \sqrt{3}$.**Problema 2.** Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar D, E și F punctele de tangență ale acestui cerc cu laturile BC, AC respectiv AB. Știind că $m(\angle A) = 60^\circ$ și $AE = 8$ cm, aflați:

a) EF;

b) PQ, unde $BI \cap DF = \{P\}$ și $CI \cap DE = \{Q\}$.**Problema 3.** Antonia își propune să completeze celulele unui tabel care are 2025 de linii și 2026 de coloane cu numere naturale astfel încât fiecare linie și fiecare coloană să conțină cel puțin un număr nenul. Ea trebuie să respecte următoarea regulă: pentru fiecare celulă (căsuță) care conține un număr nenul, suma numerelor de pe linia sa să fie egală cu suma numerelor de pe coloana sa. Stabiliți dacă reușește sau nu Antonia să completeze tabelul.**Problema 4.** Se consideră pătratul ABCD, P mijlocul laturii AB și Q mijlocul laturii BC.

a) Arătați că dreptele AQ și DP sunt perpendiculare;

b) Arătați că unghiurile ADP și PDS sunt congruente, unde S este mijlocul segmentului BQ.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

Clasa a VIII - a

Problema 1. Fie numerele $a_n = \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{7}{2 \cdot 3} + \frac{13}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n^2 - n + 1}{(n-1)n}$, $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Notăm cu $[a_n]$ partea întreagă a numărului a_n și cu $\{a_n\}$ partea fracționară a numărului a_n .

- Să se calculeze $[a_2]$ și $\{a_3\}$.
- Să se demonstreze că $\frac{n^2 - n + 1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$ pentru $n \in \mathbb{N}, n > 1$.
- Să se determine $[a_{2026}]$ și $\{a_{2026}\}$.

Problema 2. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ lungimile diagonalelor $AC = m$, $AB' = n$, $AD' = p$ verifică relația:

$$\sqrt{m^2 - 4\sqrt{3}m + 13} + \sqrt{n^2 - 4\sqrt{5}n + 29} + \sqrt{p^2 - 8p + 20} \leq 6.$$

- Calculați perimetrul triunghiului $B'CD'$.
- Aflați distanța de la punctul A' la dreapta $B'O$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

Problema 3. Rezolvați ecuația $x^2(y+1) + y^2(x+1) = 1$ în mulțimea numerelor întregi.

Problema 4. a) Fie $ABCD$ un tetraedru cu muchiile opuse congruente și M un punct al muchiei (AB) . Notăm cu P acel punct al muchiei (AD) pentru care suma $MP + PC$ să fie minimă, iar cu Q acel punct al muchiei (BD) pentru care suma $MQ + QC$ este minimă. Să se arate că:

$$\frac{MP}{PC} + \frac{MQ}{QC} = 1.$$

b) Fie $ABCD$ un tetraedru astfel încât $AB \perp CD$ și $AD \perp BC$. Demonstrați că $AC \perp BD$.